

Inhaltsverzeichnis

1	Magische Quadrate	13
1.1	Geschichte der magischen Quadrate	13
1.2	Was sind magische Quadrate	14
1.3	Magische Summe	16
1.4	Drehungen und Spiegelungen	17
1.5	Normierte magische Quadrate	20
1.6	Magische Quadrate zählen	21
1.7	Darstellung von magischen Quadraten	24
1.7.1	Koordinatensystem	24
1.7.2	Darstellung im Zahlensystem	25
1.7.3	Analytische Darstellung	26
1.7.4	Algebraische Muster	27
1.7.5	Affine Gleichungen	28
1.8	Anordnungen von Zahlen	30
1.8.1	Natürliche Anordnung	30
1.8.2	Plussequenzen	31
1.8.3	Komplementsequenzen	32
1.8.4	Reversible Quadrate	32
2	Eigenschaften	37
2.1	Semi-magische Quadrate	37
2.2	Einfache magische Quadrate	38
2.3	Symmetrische magische Quadrate	38
2.4	Pandiagonale magische Quadrate	41
2.5	Semi-pandiagonale magische Quadrate	45
2.6	Bentdiagonal magische Quadrate	46
2.7	Selbstkomplementäre magische Quadrate	48
2.8	Ultramagische Quadrate	52
2.9	Supermagische Quadrate	55
2.10	Reguläre magische Quadrate	58
2.11	Gerahmte magische Quadrate	60
2.12	Zusammengesetzte magische Quadrate	63
2.13	Bimagische Quadrate	66

2.14	Trimagische Quadrate	70
2.15	Eingebettete magische Quadrate	71
2.16	Kompakte magische Quadrate	72
2.17	Quadrantengleiche magische Quadrate	73
2.18	Magische Quadrate mit gleichen Quadratsummen	73
2.19	Zerlegung in Rechtecke mit gleichen Summen	74
3	Ordnung 4	77
3.1	Magische Quadrate 4. Ordnung	77
3.1.1	Gruppen 1 bis 6	78
3.1.2	Gruppe 6b	84
	1. Additionstabelle	87
	2. Additionstabelle	89
	3. Additionstabelle	90
3.1.3	Gruppe 7	91
3.1.4	Gruppe 8	94
3.1.5	Gruppe 9	95
3.1.6	Gruppe 10	95
3.1.7	Gruppe 11	96
3.1.8	Gruppe 12	97
3.2	Abbildungen zwischen den Dudeney-Gruppen	98
3.2.1	Gruppe 1 und Gruppe 2	98
3.2.2	Gruppe 2 und Gruppe 3	99
3.2.3	Gruppe 3 und Gruppe 1	99
3.2.4	Gruppe 4 und Gruppe 5	101
3.2.5	Gruppe 4 und Gruppe 6a	101
3.2.6	Gruppe 7 und Gruppe 8	102
3.2.7	Gruppe 7 und Gruppe 9	103
3.2.8	Gruppe 7 und Gruppe 10	104
3.2.9	Magische Eigenschaften	104
	Pandiagonal	104
	Bentdiagonal	105
	Symmetrisch	105
	Selbstkomplementär	105
4	Ungerade Ordnungen	107
4.1	Beliebige Ordnungen n	107
4.1.1	Al-Haytham	107
4.1.2	Moschopoulos 1	108
	Variation der Startposition	110
	Variation der Richtung	111

	Variation des Zwischenschrittes	112
	Variation der Richtung und des Zwischenschrittes	113
4.1.3	Moschopoulos 2	114
	Variation des Hauptschrittes	116
	Variation der Startposition	117
	Variation des Zwischenschrittes	118
4.1.4	Bachet de Méziriac	119
4.1.5	De La Loubère	121
	Variation der Startposition	123
	Variation der Richtung	124
	Variation des Zwischenschrittes	125
4.1.6	Sauveur (Diagonalenmethode)	127
4.1.7	Sauveur (Methode der Indizierung)	129
4.1.8	Sauveur (Gemischte Methode)	134
4.1.9	Sauveur (Ungeordnete Methode)	135
4.1.10	Sauveur (Methode der analogen Buchstaben)	137
4.1.11	Bachet – Labosne (Diagonalenmethode)	139
4.1.12	Bachet-Labosne (Variante von Narayana)	140
4.1.13	Rallier des Ourmes	141
4.1.14	Frierson	143
4.1.15	Allgemeine Schrittmethode	145
4.1.16	Reiner	152
4.1.17	De Los Reyes – Pourdarvish – Midha – Das	154
4.1.18	Chan – Mainkar – Narayan – Webster	156
4.1.19	Liao Yen-er – Zhu Bao-man – Wu Lian-fa	159
4.1.20	Mamzeris	161
4.1.21	Lozenge - Quadrate	170
	Methode 1	170
	Methode 2	172
	Methode 3	173
	Methode 4	174
	Methode 5	175
	Methode 6	177
	Methode 7	178
	Methode 8	179
	Methode 9	181
	Methode 10 (Modulare Gleichungen)	183
	Methode 11 (Affine Gleichungen)	185
4.2	Ordnungen $n \neq 3k$	187
4.2.1	Poignard	187
4.2.2	Margossian	188

4.3	Primzahlordnungen	194
4.3.1	Cram (Methode 1)	194
4.3.2	Cram (Methode 2)	197
4.3.3	Cram (Methode 3)	198
4.4	Zusammengesetzte Ordnungen	200
4.4.1	Cram (Methode 4)	200
	Quadratische Ordnungen	200
	Ordnungen mit mehreren Teilern	201
4.4.2	Cram (Methode 5)	203
	Quadratische Ordnungen	203
	Ordnungen mit mehreren Teilern	205
4.5	Weitere Verfahren	210
5	Doppelt-gerade Ordnungen	211
5.1	Arabische Methoden	211
5.1.1	Diagonalenmethode	211
5.1.2	Al-Kharaqi (Methode der Markierungen)	216
5.1.3	Al-Asfizari	225
5.1.4	Unbekannter Autor (Methode 1)	230
5.1.5	Unbekannter Autor (Methode 2)	233
5.1.6	Shabramallisi (Methode 1)	234
5.1.7	Shabramallisi (Methode 2)	237
5.1.8	Shabramallisi (Methode 3)	241
5.1.9	Shabramallisi (Methode 4)	246
5.1.10	Shabramallisi (Methode 5)	248
5.1.11	Shabramallisi (Methode 6)	252
5.1.12	Moschopoulos	256
5.2	Methoden der Neuzeit	261
5.2.1	Arnauld	261
5.2.2	Poinard	264
5.2.3	De la Hire	268
5.2.4	D'Ons-en-Bray	278
5.2.5	Rallier des Ourmes	281
5.2.6	Planck (Methode der Umkehrungen)	283
5.2.7	Methode der Drehungen	285
5.2.8	Drach	289
5.2.9	Cram (Methode 1)	293
5.2.10	Cram (Methode 2)	297
5.2.11	Cram (Methode 3)	302
5.2.12	Planck	308
5.2.13	Shen	312

5.2.14	Huang – Lin	318
5.2.15	Umar	322
5.2.16	Ibrahim – Jibril – Umar	324
5.2.17	Pan Linsen	327
5.2.18	Liang Peiji – Zhang Hangfu – Zhang Xiafu	328
5.2.19	Duan – Liu – Li – Tian	329
5.2.20	Zheng Ronghui – Lin Kerong – Chen Rongsi	331
5.2.21	Lin Pengcheng (Methode 1)	332
5.2.22	Lin Pengcheng (Methode 2)	334
5.2.23	Zhu Yunshan	336
5.2.24	Miranda – Miranda (Methode 1)	338
5.2.25	Miranda – Miranda (Methoden 2 und 3)	343
5.3	Erweiterung von 4×4 - Basisquadraten	349
5.3.1	Unbekannter Autor (Methode 1)	349
5.3.2	Unbekannter Autor (Methode 2)	358
5.3.3	Unbekannter Autor (Methode 3)	364
5.3.4	Unbekannter Autor (Methode 4)	366
5.3.5	Unbekannter Autor (Methode 5)	368
5.3.6	Unbekannter Autor (Methode 6)	371
5.3.7	Unbekannter Autor (Methode 7)	373
5.3.8	Unbekannter Autor (Methode 8)	375
6	Einfach-gerade Ordnungen	384
6.1	Eigenständige Verfahren	384
6.1.1	Al-Kharaqi	384
6.1.2	Al-Haytham	389
6.1.3	Al-Antaki	392
6.1.4	Bachet – Labosne	397
6.1.5	Drach	400
6.1.6	Nelson	402
6.1.7	Bouteloup	405
6.1.8	Wang Fat – Zhou Ming	409
6.1.9	Unbekannter Autor (Methode 1)	411
6.2	Erweiterung von anderen Verfahren	414
6.2.1	Rallier des Ourmes	414
6.2.2	Cram	416
6.2.3	Planck (Methode der Umkehrungen)	420
6.2.4	Shen	423
6.2.5	Pan Linsen	426
6.2.6	Liang Peiji – Zhang Hangfu – Zhang Xiafu	429
6.2.7	Lin Pengcheng (Methode 1)	431

6.2.8	Lin Pengcheng (Methode 2)	433
6.2.9	Duan – Liu – Li – Tian	437
6.2.10	Umar	440
6.2.11	Ibrahim – Jibril – Umar	442
6.2.12	unbekannter Autor (Methode 2)	445
6.2.13	Unbekannter Autor (Methode 3)	451
7	Gerade Ordnungen	457
7.1	Devedec	457
7.2	Planck	460
7.3	Lecornu	464
7.4	Sauveur	468
7.5	Unbekannter Autor	471
8	Verdopplung der Ordnung	475
8.1	Einfach-gerade Ordnungen	475
8.1.1	LUX - Methode (Conway)	475
8.1.2	Strachey	478
8.1.3	Rothstein	480
8.1.4	Unbekannter Autor (Methode 1)	489
8.1.5	Unbekannter Autor (Methode 2)	492
8.1.6	Zheng Ronghui – Lin Kerong – Chen Rongsi	493
8.1.7	Zhan – Wang – Huang	496
8.2	Doppelt-gerade Ordnungen	501
8.2.1	Aubry	501
8.2.2	Unbekannter Autor (Methode 3)	503
8.3	Beliebige gerade Ordnungen	507
8.3.1	Strachey (Variante von Benson – Jacoby)	507
8.3.2	Benson – Jacoby	510
8.3.3	Bouteloup	513
8.3.4	Hendricks	518
8.3.5	Chen Zhong-mu	525
8.3.6	Widdis – Richter	529
8.3.7	Candy	533
8.3.8	Medjig-Methode	556
8.3.9	Cram	564
9	Gerahmte magische Quadrate	570
9.1	Gerahmte magische Quadrate ungerader Ordnung	570
9.1.1	Abu'l-Wafa al-Buzjani (Methode 1)	570
9.1.2	Abu'l-Wafa al-Buzjani (Methode 2)	573

9.1.3	Abu'l-Wafa al-Buzjani (Methode 3)	575
9.1.4	Ibn Yunis	578
9.1.5	Stifel	581
9.1.6	Al-Kharaqi	590
9.1.7	Seki	593
9.1.8	Tanaka	597
9.1.9	Travers	599
9.1.10	Vaithianathan	602
9.1.11	Unbekannter Autor (Methode 1)	605
9.1.12	Unbekannter Autor (Methode 2)	607
9.1.13	Unbekannter Autor (Methode 3)	609
9.1.14	Benson – Jacoby	612
9.2	Gerahmte magische Quadrate gerader Ordnung	615
9.2.1	Al-Kharaqi	615
9.2.2	Al-Zanjani	620
9.2.3	Stifel	624
9.2.4	Seki	630
9.2.5	D'Ons-en-Bray	632
9.2.6	Rallier des Ourmes	635
9.2.7	Andrews	641
9.2.8	Benson – Jacoby	644
9.2.9	Liu Feng-lin	650
9.2.10	Unbekannter Autor (Methode 1)	655
9.2.11	Unbekannter Autor (Methode 2)	659
9.2.12	Unbekannter Autor (Methode 3)	663
9.2.13	Unbekannter Autor (Methode 4)	666
9.2.14	Unbekannter Autor (Methode 5)	668
9.2.15	Lin Shu-fei	674
9.2.16	Wang Hui-feng	680
9.2.17	Zhao Li-hua	685
9.2.18	Zhu Yunshan	687
9.3	Konzentrische magische Quadrate ungerader Ordnung	692
9.3.1	Al-Buni (Methode 1)	692
9.3.2	Al-Buni (Methode 2)	694
9.3.3	Dommissé	696
9.3.4	Rallier des Ourmes	701
9.3.5	Hendricks	708
9.3.6	Arnauld	714
9.3.7	Deng Xiang-ping	722
9.4	Konzentrische magische Quadrate gerader Ordnung	727
9.4.1	Al-Buni	727

9.4.2	Arnould	729
9.4.3	Cao Xiao-qin	740
10	Zusammengesetzte Ordnungen	745
10.1	Standardverfahren	745
10.2	Xu – Mao – Chen – Huang (Kronecker-Operationen)	749
11	Bimagische Quadrate	755
11.1	Ordnung $n=8$	756
11.1.1	Coccoz	756
11.1.2	Coccoz (algebraisches Muster)	774
11.1.3	Rilly	776
11.1.4	Tarry	786
11.1.5	Portier	795
11.1.6	Gérardin	801
11.1.7	Tarry – Cazalas	805
11.1.8	Hendricks	811
11.1.9	Kejun Chen – Wen Li	814
11.1.10	De Winkel	818
11.1.11	De Winkel (Pandiagonale Quadrate)	821
11.1.12	Lamb	824
11.1.13	Transformationen von bimagischen Quadraten	827
11.1.14	Normieren von bimagischen Quadraten	833
11.1.15	Anzahl bimagischer Quadrate	836
11.2	Ordnung $n=9$	840
11.2.1	Coccoz	840
11.2.2	Coccoz (algebraisches Muster)	850
11.2.3	Portier	852
11.2.4	Tarry – Cazalas	871
11.2.5	Hendricks	875
11.2.6	De Winkel	880
11.2.7	Chen	884
11.2.8	Anzahl symmetrischer Quadrate	886
11.2.9	Anzahl symmetrischer diagonaler Euler-Quadrate	890
11.3	Ordnungen 10 bis 15	892
11.3.1	Ordnung 10	892
11.3.2	Ordnung 11	893
11.3.3	Ordnung 12	895
11.3.4	Ordnung 13	899
11.3.5	Ordnung 14	900
11.3.6	Ordnung 15	900

11.4	Ordnung $n = 16$	902
11.4.1	Tarry	902
11.4.2	Tarry – Cazalas	902
11.4.3	Viricel – Boyer	906
11.4.4	Hendricks	911
11.4.5	Kejun Chen – Wen Li	913
11.4.6	Lamb	917
11.5	Ordnungen $n = 20, 24, 28, \dots$	921
11.5.1	Kejun Chen - Wen Li	921
11.6	Ordnung $n = 25$	925
11.6.1	Tarry – Cazalas	925
11.6.2	Hendricks	928
11.6.3	Li Wen	933
11.6.4	Taneja	935
12	Trimagische Quadrate	943
12.1	Ordnung 12	943
12.2	Ordnung 16	946
12.3	Ordnung 24	949
13	Pandiagonale magische Quadrate	951
13.1	Ungerade Ordnungen $n \neq 3k$	951
13.1.1	De La Hire	951
13.1.2	Bachet – Labosne (de la Hire-Methode)	953
13.1.3	Cheng Pin	955
13.1.4	Liang Peiji – Zhang Hangfu – Zhang Xiafu	957
13.1.5	Wang Huifeng	958
13.1.6	Xu Zhihui	961
13.1.7	Zhao Li-hua	963
13.1.8	Hendricks	965
13.2	Ungerade Ordnungen $n = 3k$	967
13.2.1	Margossian	967
13.2.2	Bouteloup	971
13.2.3	Hendricks	987
13.2.4	Candy (Methode 1)	994
13.2.5	Candy (Methode 2)	999
13.3	Ungerade Ordnungen: n ist eine Primzahl	1003
13.3.1	Frost	1003
13.3.2	Fourrey	1005
13.3.3	Candy	1010
13.4	Ungerade Ordnungen: n ist keine Primzahl	1013

13.4.1	Planck	.1013
13.5	Doppelt-gerade Ordnungen	.1017
13.5.1	Aubry	.1017
13.5.2	Bouteloup	.1019
13.5.3	Sayles	.1032
13.5.4	Woodruff	.1036
13.5.5	Wang Zhengyan	.1044
13.5.6	Zhang Xiafu – Liang Peiji – Zhang Hangfu	.1046
13.5.7	Candy (Methode 1)	.1047
13.5.8	Candy (Methode 2)	.1052
13.5.9	Hendricks	.1055
13.5.10	Barink	.1061
13.6	Besondere pandiagonale magische Quadrate	.1069
13.6.1	Typ $10-in-1$.1069
13.6.2	Typ $35-in-1$.1075
13.7	Weitere Verfahren	.1079
14	Supermagische Quadrate	.1080
14.1	Margossian	.1080
14.2	Hendricks	.1083
14.3	Ollerenshaw – Brée	.1086
14.4	De Winkel (Zellentausch)	.1088
14.5	De Winkel (Dynamic Numbering)	.1093
15	Diagonale Euler-Quadrate	.1096
15.1	Euler-Quadrate	.1096
15.2	Symmetrische diagonale Euler-Quadrate	.1098
15.2.1	Ordnung $n=5$.1098
15.2.2	Ordnung $n=7$.1099
15.2.3	Ordnung $n=9$.1112
15.3	Symmetrische Primzahlquadrate	.1115
16	Franklin - Quadrate	.1120
16.1	Eigenschaften	.1121
16.2	Pandiagonale Franklin-Quadrate	.1128
16.3	Zerlegung in Euler-Quadrate	.1129
16.4	Konstruktionen	.1130
16.4.1	Franklin-Quadrat (Jacobs)	.1130
16.4.2	Semi-magische Franklin-Quadrate	.1132
16.4.3	Pandiagonale Franklin-Quadrate	.1136
16.4.4	Pandiagonale Franklin-Quadrate (Breedijk)	.1138

16.5 Transformationen1144
16.5.1 Transformationen von Franklin-Quadraten1144
16.5.2 Umwandlung in ein pandiagonales Quadrat1147
16.5.3 Umwandlung in ein supermagisches Quadrat1148
16.5.4 Umwandlung aus einem supermagischen Quadrat1149
17 Eingebettete magische Quadrate1150
17.1 Bentdiagonale Teilquadrate1151
17.2 Überlappende magische Quadrate1153
17.2.1 Ordnung 71153
17.2.2 Ordnung 91156
17.2.3 Ordnung 131161
17.2.4 Ordnung 151165
17.3 Algebraische Muster1168
17.4 Eingebettete Rauten1169
17.5 Fester Rahmen $n=7$1175
17.6 Fester Rahmen $n=9$1177
17.7 Eingebettetes pandiagonales Quadrat der Ordnung 61182
17.8 Rahmen $n=10$1183
17.9 Rahmen $n=12$1186
17.10 Fester Rahmen $n=16$1190
17.11 Fester Rahmen $n=20$1198
17.12 Vier eingebettete Quadrate in einem Rahmen1209
17.13 Eingebettetes bimagisches Quadrat1213
18 Transformationen1215
18.1 Alle Ordnungen1215
18.1.1 Komplementäre Zahlen1215
18.1.2 Zeilen/Spalten-Transformation1217
18.1.3 Zeilen/Spalten-Permutation1219
18.1.4 Quadrantentausch1220
18.2 Ordnungen $n=4k$1222
18.2.1 Transformation symmetrisch \rightarrow pandiagonal1222
18.2.2 Transformation reversibel \rightarrow reversibel1222
18.2.3 Transformation reversibel \rightarrow supermagisch1223
18.2.4 Transformation supermagisch \rightarrow symmetrisch1224
18.2.5 Transformation supermagisch \rightarrow Franklin-Quadrat1225
18.3 Gerade Ordnungen1228
18.3.1 Huber1228
18.4 Pandiagonale Quadrate doppelt-gerader Ordnungen1231
18.4.1 Normalisieren1231

18.4.2	Panflip - Transformation1232
18.5	Pandiagonale Quadrate ungerader Ordnungen1233
18.5.1	Transformationen R^+ und R^-1233
18.5.2	Transformationen C^+ und C^-1234
18.5.3	Chia1235
18.5.4	Transformation gerade - ungerade Spalten1236
18.6	LDR-Darstellung1237
18.7	Weitere Transformationen1240
19	Galerie1242
19.1	Besondere magische Quadrate1242
19.2	Multimagische Quadrate1248
19.2.1	Bimagische Quadrate der Ordnung 81249
19.2.2	Bimagische Quadrate der Ordnung 91250
19.2.3	Pandiagonale bimagische Quadrate1252
19.2.4	Ein bi-pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung 321256
19.2.5	Trimagische Quadrate1257
19.3	Eingebettete magische Quadrate1257
19.3.1	Einfache eingebettete magische Quadrate1257
19.3.2	Mehrere eingebettete magische Quadrate1260
19.3.3	Eingebettete Rauten1267
19.3.4	Besondere konzentrische magische Quadrate1270
19.4	Vollständige Aufteilung in Inlays1272
19.5	Patchwork-Quadrate1274
19.6	Magische Quadrate mit verschachtelten Inlays1276
19.7	Überlappende magische Quadrate1279
19.8	Eingebettete Quadrate mit optionalen Inlays1286
Literatur1293
Index1318
	Pandiagonale magische Quadrate1331
	Bimagische Quadrate1334
	Magische Quadrate (Autor)1336
	Magische Quadrate (Ordnung)1345